

Introduction aux séries temporelles
Partiel du jeudi 31/10/2024

Durée 2 heures - Documents et calculatrices non autorisés

- Exercice 1 (10 points)**
1. Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stationnaire de moyenne μ_X et de fonction d'autocovariance γ_X . Montrer que $\mathbb{E}[X_t^2]$ est bien défini et indépendant de $t \in \mathbb{Z}$.
 2. Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stationnaire de moyenne μ_X et de fonction d'autocovariance γ_X . On pose $Y_t = (-1)^t X_t$ pour $t \in \mathbb{Z}$.
 - (a) On suppose que $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire. Montrer que $\mu_X = 0$.
 - (b) Inversement, on suppose que $\mu_X = 0$. Montrer que $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire.
 3. Soit l'équation $AR(\infty)$: $X_t = Z_t - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k X_{t-k}$, où $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc fixé et $\lambda \in]0, 1[$.
 - (a) Mettre l'équation sous la forme $F_\alpha X = F_\beta Z$, où l'on explicitera $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $\beta \in \ell^1(\mathbb{Z})$.
 - (b) Déterminer $\gamma \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tel que $X = F_\gamma Z$.
 4. Soit $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un bruit blanc. Déterminer la solution de l'équation $AR(2)$:

$$X_t = X_{t-1} - \frac{1}{4}X_{t-2} + Z_t \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Solution :

1. **(1pt)** Comme $X_t \in L^2$, $\mathbb{E}[X_t^2]$ existe et on a

$$\gamma_X(0) = \text{var}(X_t) = \mathbb{E}[X_t^2] - \mu_X^2.$$

Donc $\mathbb{E}[X_t^2] = \gamma_X(0) + \mu_X^2$ est indépendant de t .

2. (a) **(1pt)** Si $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire, alors

$$\mathbb{E}[Y_t] = (-1)^t \mu_X$$

est indépendant de t , et donc $0 = \mathbb{E}[Y_0] - \mathbb{E}[Y_1] = 2\mu_X$. Cela montre que $\mu_X = 0$.

- (b) **(2pt)** Inversement, si $\mu_X = 0$, alors $Y_t \in L^2$ pour tout t et $\mathbb{E}[Y_t] = 0$. De plus, pour tout $s, t \in \mathbb{Z}$,

$$\text{cov}(Y_s, Y_t) = (-1)^{s+t} \text{cov}(X_s, X_t) = (-1)^{t-s} \gamma_X(t-s),$$

puisque $(-1)^{s+t} = (-1)^{s+t-2s} = (-1)^{t-s}$. Donc $Y_t \in L^2$ pour tout t , $\mathbb{E}[Y_t]$ ne dépend que de t et $\text{cov}(Y_s, Y_t)$ ne dépend que de $t-s$, ce qui montre que (Y_t) est un processus stationnaire.

3. (a) **(1pt)** Posons $\alpha_t = \lambda^t$ si $t \in \mathbb{N}$ et $\lambda_t = 0$ si $t \leq 0$ et $\beta_t = \mathbf{1}_{t=0}$. Alors, comme $\lambda \in]0, 1[$, $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tandis que $\beta \in \ell^1(\mathbb{Z})$ de façon évidente. Enfin,

$$F_\alpha X_t = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda^k X_{t-k} = X_t + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k X_{t-k} = Z_t = F_\beta Z_t.$$

(b) **(2pt)** On note que pour tout $t \in \mathbb{C}$ and $|z| = 1$, on a

$$P_\alpha(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda^k z^k = \frac{1}{1 - \lambda z}$$

puisque $|\lambda z| < 1$. Alors α est inversible d'inverse $\gamma \in \ell^1$ tel que $P_\gamma(z) = 1/P_\alpha(z) = 1 - \lambda z$, i.e., $\gamma_t = \mathbf{1}_{t=0} - \lambda \mathbf{1}_{t=1}$. Par théorème de cours, $F_\gamma = F_\alpha^{-1}$ et donc $X = F_\gamma \circ F_\beta Z = F_\gamma Z$.

4. **(3pt - enlever 1 pt si méthode juste mais erreur de calcul)** On remarque que $F_\beta X = Z$, avec $\beta \in \ell^1(\mathbb{Z})$ est tel que $P_\beta(z) = 1 - z + \frac{z^2}{4} = (1 - \frac{z}{2})^2$. Comme P_β a pour racine $2 > 1$, on déduit d'un théorème de cours que β est inversible. On note $\gamma \in \ell^1$ son inverse, qui vérifie

$$P_\gamma(z) = \frac{1}{P_\beta(z)} = \frac{1}{(1 - \frac{z}{2})^2} \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| = 1.$$

Or

$$\frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} z^k,$$

où la série entière à droite est infiniment dérivable sur $\{z \in \mathbb{C}, |z| < 2\}$. Donc

$$\left(\frac{1}{1 - \frac{z}{2}} \right)' = \frac{1}{2} \frac{1}{(1 - \frac{z}{2})^2} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-1} (k+1) z^k.$$

On en déduit que

$$P_\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} (k+1) z^k,$$

soit $\gamma_k = 2^{-k} (k+1) \mathbf{1}_{k \geq 0}$. Un théorème de cours affirme alors que $X = F_\gamma Z$.

Exercice 2 (10 points) On se donne deux bruits blancs $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ et $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ tous deux de moyenne nulle et variance 1, et qui sont décorrélés : $\text{cov}(\epsilon_s, \eta_t) = 0$ pour tout $s, t \in \mathbb{Z}$. On fixe $\phi \in]0, 1[$ et $\psi \in]0, 1[$ deux constantes. L'objectif de l'exercice est de montrer l'existence de deux processus stationnaires $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ et $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ tels que

$$\begin{aligned} Y_t &= \phi Y_{t-1} + X_t + \epsilon_t & \forall t \in \mathbb{Z}, \\ X_t &= \psi X_{t-1} + \eta_t & \forall t \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

On notera $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $\beta \in \ell^1(\mathbb{Z})$ les filtres tels que $P_\alpha(z) = 1 - \phi z$ et $P_\beta(z) = 1 - \psi z$.

1. Montrer que le processus (X_t) existe et est unique.
2. Montrer que $W_t = X_t + \epsilon_t$ est un processus stationnaire.
3. En déduire que (Y_t) existe et est unique.
4. Montrer que

$$Z_t := F_\alpha \circ F_\beta Y_t \quad t \in \mathbb{Z}$$

est un processus stationnaire et calculer sa fonction d'autocovariance.

5. En déduire qu'il existe $\theta \in (0, 1)$ et un bruit blanc $(\zeta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ (dont on déterminera la variance $\sigma > 0$ en fonction de ϕ et θ) tels que

$$Z_t = \zeta_t - \theta \zeta_{t-1} \quad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

6. En déduire que Y vérifie une équation ARMA(p,q) en fonction de ζ ; on explicitera l'équation et on montrera que Y est donné par un filtre causal de ζ (on ne demande pas de calculer explicitement Y en fonction de ζ).

Solution :

1. **(1pt)** Soit $\beta \in \ell^1(\mathbb{Z})$ défini par $\beta_t = 1$ si $t = 0$, $\beta_t = -\phi$ si $t = 1$ et $\beta_t = 0$ sinon. L'équation de X s'écrit $F_\beta X_t = \eta_t$. Comme $P_\beta(z) = 1 - \psi z$ n'a qu'une seule racine $1/\psi$ de module strictement supérieure à 1, un théorème de cours affirme que β est inversible et la solution de l'équation de X est alors unique et donnée par $X_t = F_{\beta^{-1}} \eta_t$.
2. **(2pt - il faut justifier soit en utilisant le calcul ci-dessous, soit en expliquant pourquoi X et ϵ sont décorrélés)** On doit faire un peu attention ici car la somme de deux processus stationnaires n'est pas stationnaire en général. Notons que $W_t \in L^2$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ car X_t et ϵ_t sont dans L^2 . De plus

$$\mathbb{E}[W_t] = \mu_X + \mu_\epsilon$$

est indépendant de $t \in \mathbb{Z}$. Enfin, pour tout $t, h \in \mathbb{Z}$,

$$\text{Cov}(W_t, W_{t+h}) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) + \text{Cov}(X_t, \epsilon_{t+h}) + \text{Cov}(\epsilon_t, X_{t+h}) + \text{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_{t+h}).$$

Par bilinéarité de la covariance et sa continuité on a

$$\text{Cov}(X_t, \epsilon_{t+h}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\beta^{-1})_k \text{Cov}(\eta_{t-k}, \epsilon_{t+h}) = 0$$

puisque $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ et $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sont décorrélés. De même

$$\text{Cov}(\epsilon_t, X_{t+h}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\beta^{-1})_k \text{Cov}(\eta_t, \epsilon_{t+h-k}) = 0.$$

Donc

$$\text{Cov}(W_t, W_{t+h}) = \gamma_X(h) + \gamma_\epsilon(h)$$

est indépendant de t .

3. **(1pt)** Soit $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ défini par $\alpha_t = 1$ si $t = 0$, $\alpha_t = -\phi$ si $t = 1$ et $\alpha_t = 0$ sinon. Comme W est un processus stationnaire, l'équation de Y s'écrit $F_\alpha Y = W$. Comme $P_\alpha(z) = 1 - \phi z$ n'a qu'une seule racine $1/\phi$ de module strictement supérieure à 1, un théorème de cours affirme que α est inversible et que la solution de l'équation pour Y est alors unique et donnée par $Y_t = F_{\alpha^{-1}} W_t$.
4. **(2pt)** Avec les notations précédentes, on a $Z_t = F_\alpha \circ F_\beta Y_t$. Comme Y est un processus stationnaire et $\alpha, \beta \in \ell^1(\mathbb{Z})$, le théorème de filtrage affirme que Z est un processus stationnaire. Notons que, comme le produit $*$ est commutatif dans $\ell^1(\mathbb{Z})$, on a

$$\begin{aligned} Z_t &= F_\alpha \circ F_\beta Y_t = F_{\alpha * \beta} Y_t = F_\beta \circ F_\alpha Y_t = F_\beta W_t = F_\beta X_t + F_\beta \epsilon_t \\ &= \eta_t + \epsilon_t - \psi \epsilon_{t-1}. \end{aligned}$$

On peut maintenant calculer la fonction d'autocovariance de Z : si $h \geq 0$, et comme les processus ϵ et η sont des bruits blancs décorrélés et de variance 1,

$$\begin{aligned}\gamma_Z(h) &= \text{cov}((\eta_0 + \epsilon_0 - \psi\epsilon_{-1}), (\eta_h + \epsilon_h - \psi\epsilon_{h-1})) \\ &= \text{cov}(\eta_0, \eta_h) + \text{cov}(\epsilon_0 - \psi\epsilon_{-1}, \epsilon_h - \psi\epsilon_{h-1}) \\ &= \mathbf{1}_{h=0} + (1 + \psi^2)\mathbf{1}_{h=0} - \psi\mathbf{1}_{h=1}.\end{aligned}$$

Donc, comme γ_Z est paire,

$$\gamma_Z(h) = (2 + \psi^2)\mathbf{1}_{h=0} - \psi\mathbf{1}_{|h|=1} \quad \forall h \in \mathbb{Z}.$$

5. **(3pt)** Si θ et ζ existent, alors par un calcul classique

$$\gamma_Z(h) = \sigma^2(1 + \theta^2)\mathbf{1}_{h=0} - \sigma^2\theta\mathbf{1}_{|h|=1} \quad \forall h \in \mathbb{Z}.$$

Vu la question précédente, on cherche donc θ et σ tels que

$$\sigma^2(1 + \theta^2) = 2 + \psi^2 \quad \text{et} \quad \sigma^2\theta = \psi.$$

On peut prendre $\sigma = \sqrt{\psi/\theta}$ et l'équation pour θ s'écrit alors $f(\theta) := \theta^2 - \psi^{-1}(2 + \psi^2)\theta + 1 = 0$. Or $f(0) > 0$ et $f(1) < 0$ (car $\psi \in]0, 1[$) : il donc existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $f(\theta) = 0$.

On définit le filtre $\gamma \in \ell^1(\mathbb{Z})$ par $\gamma_0 = 1$, $\gamma_1 = -\theta$ et $\gamma_t = 0$ sinon. Par des arguments similaires à ceux évoqués plus haut, γ est inversible et on doit donc avoir $\zeta = F_{\gamma^{-1}}Z$. Reste à vérifier que ζ défini ainsi est un bruit blanc de variance σ^2 . Rappelons que $\gamma_t^{-1} = \theta^t\mathbf{1}_{t \geq 0}$. Donc, pour $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\gamma_\zeta(t) &= \sum_{j,k \in \mathbb{N}} \gamma_j^{-1} \gamma_k^{-1} \gamma_Z(t - k + j) \\ &= \sum_{j,k \in \mathbb{N}} \theta^{j+k} ((2 + \psi^2)\mathbf{1}_{t-k+j=0} - \psi\mathbf{1}_{t-k+j=1} - \psi\mathbf{1}_{t-k+j=-1})\end{aligned}$$

Si $t \geq 1$, on trouve en tenant compte des relations entre σ , θ et ψ :

$$\gamma_\zeta(t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \theta^{2j+t} ((2 + \psi^2) - \theta^{-1}\psi - \theta\psi) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \theta^{2j+t} (\sigma^2(1 + \theta^2) - \sigma^2 - \sigma^2\theta^2) = 0,$$

tandis que, si $t = 0$, on trouve

$$\gamma_\zeta(t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \theta^{2j+t} ((2 + \psi^2) - \theta^{-1}\psi - \theta\psi) + \theta^{-1}\psi = \sigma^2.$$

On peut donc conclure que ζ est un bruit blanc de variance σ^2 .

6. **(1pt)** Comme

$$\begin{aligned}Z_t &= (1 - \phi B)(1 - \psi B)Y_t = F_\alpha \circ F_\beta Y_t = F_\alpha(Y_t - \psi Y_{t-1}) = Y_t - \psi Y_{t-1} - \phi(Y_{t-1} - \psi Y_{t-2}) \\ &= Y_t - (\psi + \phi)Y_{t-1} + \psi\phi Y_{t-2},\end{aligned}$$

ce qui se réécrit comme

$$Y_t = (\psi + \phi)Y_{t-1} - \psi\phi Y_{t-2} + Z_t = (\psi + \phi)Y_{t-1} - \psi\phi Y_{t-2} + \zeta_t - \theta\zeta_{t-1}$$

Donc Y est un processus ARMA (2,1) d'équation

$$Y_t = (\psi + \phi)Y_{t-1} - \psi\phi Y_{t-2} + \zeta_t - \theta\zeta_{t-1}$$

Comme les racines du polynôme $1 - (\psi + \phi)z + \psi\phi z^2$ sont $1/\phi > 1$ et $1/\psi > 0$, on déduit d'un résultat de cours que Y donné par un filtre causal de ζ .